数学分析习题课讲义

Qirun Zeng

2025 年 10 月 25 日

目录

1 第一次习题课讲义 **3**
1.1 均值不等式 3
1.2 实数 4
1.2.1 整数与有理数 4
1.2.2 习题 1.1 4
1.3 连续（完备）性公理几个等价形式之间的互相推导 5
1.3.1 确界原理证明单调有界原理 5
1.3.2 单调有界原理证明区间套定理 5
1.3.3 区间套定理证明列紧性定理 6
1.3.4 列紧性定理证明 Cauchy 收敛准则 6
1.3.5 Cauchy 收敛定理准则证明确界原理 6

2 第二次习题课讲义 **9**
2.1 Monday's 9
2.1.1 习题 1.2 9
2.2 Tuesday's 11
2.2.1 习题 1.2 11
2.3 Friday's 13
2.3.1 习题 1.2 13
2.3.2 第 1 章综合习题 13
2.4 不等式选讲 14

3 第五次习题课讲义 **17**
3.1 知识点回顾 17
3.1.1 Fermat and Rolle theorem 17
3.1.2 微分中值定理 17
3.2 确界与极限点 18
3.3 上极限与下极限 19
3.4 开集与闭集 20
3.5 Answer of homework 22
3.5.1 10.16 22
3.5.2 10.18 23
3.5.3 10.20 25

4 第八次习题课 **27**
4.1 简要回顾-不定积分 27
4.2 积分求导 28
4.3 作业答案 28

4.3.1 习题 4.1 28
4.3.2 习题 4.2 30
4.4 补充习题 31
4.5 简要回顾-定积分 32

Chapter 1

第一次习题课讲义

1.1 均值不等式

调和平均数

$$H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

几何平均数

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

算术平均数

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

平方平均数

$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

有:

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant Q_n$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时等号成立.

证明. 留作思考题, 不讲. □

例: 求证

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

证明. 利用 $G_n < A_n$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+1\right) < \left(\frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

□

1.2 实数

1.2.1 整数与有理数

数域: 设 $\mathbb{F}$ 为一个集, $\mathbb{F}$ 称为一个**域**指它满足以下公理:

加法公理: $\mathbb{F}$ 中的元素具有加法运算 "$+$", 即 $\forall x, y \in \mathbb{F}$, 可以定义 $x+y, x+y \in \mathbb{F}$. 加法运算满足:

1. 存在零元 $0: x+0=0+x=x$.
2. 存在负元: $\forall x \in \mathbb{F}, \exists -x \in \mathbb{F}$, s.t. $x+(-x)=(-x)+x=0$. (减法)
3. 交换律: $x+y=y+x$.
4. 结合律: $x+(y+z)=(x+y)+z$.

乘法公理: $\mathbb{F}$ 中的元素具有乘法运算 "$\cdot$". 即 $\forall x, y \in \mathbb{F}$, 可以定义 $x \cdot y, x \cdot y \in \mathbb{F}$. 乘法运算满足:

1. 存在单位元: $1: 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.
2. 有逆元: $\forall x \neq 0, x \in \mathbb{F}, \exists x^{-1} \in \mathbb{F}$, s.t. $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$. (除法)
3. 交换律: $x \cdot y = y \cdot x$.
4. 结合律: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
5. 分配律: $(x+y) \cdot z = x \cdot y + y \cdot z$.

综上: 我们说对四则运算封闭的集合称为**域**.

- 最小的数域是有理数域.

自然数集: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

整数集:$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

有理数集:$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \Big| p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

有理数包括所有有限小数和无限循环小数, 无限不循环小数称为无理数.

定义映射 $f := \mathbb{A} \to \mathbb{B}$

单射: $\forall x, y \in \mathbb{A}, f(x) \neq f(y)$

满射: $\forall y \in \mathbb{B}, \exists x \in \mathbb{A}$ s.t. $f(x) = y$

双射: 既单又满, 也就是说建立了一一映射.

可数集合: 每个元素都能与自然数集 N 的每个元素之间能建立一一对应的集合, 显然自然数集是可数集

lemma: 有理数集合是可数集

证明. 现场直接证. □

lemma: 两个可数集的并依然是可数集

证明. 现场直接证. □

例: 设 $A = B \sqcup C$, B 可数,A 不可数, 求证 C 不可数.

证明. 反证. □

1.2.2 习题 1.1

3

求证:$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}+\sqrt{3}$ 都是无理数.

证明. 设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则 $\exists p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \backslash \{0\}, p \perp q$, s.t. $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.
那么 $p^2 = 2 \cdot q^2$.
$\Longrightarrow p^2$ 是 2 的倍数.
$\Longrightarrow p$ 是 2 的倍数.
$\Longrightarrow p^2$ 是 4 的倍数.

设 $p^{'} = \frac{p}{2}$, 则 $q^2 = 2 \cdot p^{'2}$
$\Longrightarrow q$ 是 2 的倍数. 与 p, q 互质矛盾, 所以 $\sqrt{2}$ 不是有理数. □

$\sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 请同学们自证.

6

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 有相同的符号, $\forall i \in [1, n], a_i > -1$, 求证:

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

证明. 由数学归纳法易证. □

1.3 连续（完备）性公理几个等价形式之间的互相推导

- **说明:** 数集 (数列) 默认有无穷多个数

1. 确界原理: $\mathbb{R}$ 中任何有上 (下) 界的非空数集一定有上 (下) 确界.

2. 单调有界原理: 单调递增 (减) 有界数列必收敛, 其极限值等于数列构成的数集的上确界 (下确界), 也称为数集的上确界 (下确界).

3. 区间套定理: 设有一列闭区间 $([a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots)$. 满足下列条件:

- $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$
- $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

则存在唯一一个点 ξ 属于所有闭区间 $[a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$

4. 列紧性定理: (Bolzano-Weierstrass) 任何有界数列必存在收敛子列.

基本列: $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$ s.t. $\forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$

5. Cauchy 收敛准则: 数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是基本列.

1.3.1 确界原理证明单调有界原理

证明. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递增有界数列, 那么根据确界原理, 有上确界 A.
接下来证明 A 是数列 $\{a_n\}$ 的极限.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_N, \text{s.t.} A - \varepsilon < a_N (\text{定义})$$

因为 a_n 单调递增

$$n > N \Rightarrow A - \varepsilon < a_N < a_n$$

那么 A 也是 $\{a_n\}$ 的上界

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = A$$

□

1.3.2 单调有界原理证明区间套定理

证明. 易知 $\{a_n\}$ 单调递增, $\{b_n\}$ 单调递减.
那么由单调有界原理, 不妨设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$
又 $\forall n \in N_+ a_n < b_n \Longrightarrow a \leqslant b \Longrightarrow b - a = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ □

1.3.3 区间套定理证明列紧性定理

证明. 设 $\{a_n\}$ 单调有界, 不妨设 $\{a_n\} \subset [c,d]$. 那么 $\left[c, \frac{c+d}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{c+d}{2}, d\right]$ 至少有一个含有 $\{a_n\}$ 的无限多项, 记为 $[c_1, d_1]$. 同样, $\left[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{c_1+d_1}{2}, d_1\right]$ 至少有一个含有 $\{a_n\}$ 的无限多项
如此不断重复可得一列区间套:

$$[c_1, d_1] \supset [c_2, d_2] \supset \cdots \supset [c_n, d_n] \supset \cdots, \lim_{n\to\infty}(c_n - d_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(c-d) = 0$$

在 $[c_i, d_i]$ 中取 a_{j_i}, 则 $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots\}$ 可作为收敛的子列 □

1.3.4 列紧性定理证明 Cauchy 收敛准则

证明. 先证必要性:

$$\{a_n\}\text{收敛} \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)\text{s.t.}m,n > N\text{时}, |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

之后应用三角不等式即可得:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

再证充分性:
对于正数 1, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $m,n \geqslant N_1$ 时, $|a_m - a_n| < 1$.
那么对于 $a_n, n > N_1$, 恒有 $|a_n| < |a_{N_1}| + 1$.

$$\text{令}M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_1}| + 1\} \Rightarrow M \geqslant |a_n|, \forall n \in N_+$$

由列紧性定理可知: 存在收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, 不妨设 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}\text{s.t.}|a_{n_k} - a| < \varepsilon, \forall k > K$$

又因为 $\{a_n\}$ 是基本列, 对于上述 ε,

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}\text{s.t.}\forall m,n > N_2, |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

可取 n_k s.t. $n_k > N_2 \&\& k > K$.
所以 $n > N_2$ 时, 有:

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

1.3.5 Cauchy 收敛定理准则证明确界原理

证明. 不妨设 $\mathbb{A} = \{a_i | i \in N_+\} \subset R$ 有上界, 记为 M.

若 $a_1.,, = M$, 则定理得证, 否则 $a_1 < M$. 取 $b = \frac{M-a_1}{2}$, 那么 $[a_1, b]$ 和 $[b, M]$ 中有一个集合（记为 $[c_1, d_1]$）满足 $\exists a_{n_1} \geqslant c_1, \forall a_n \leqslant d_1$.
从而得到一列 $\{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots\}$. 很显然数列 $\{a_{n_i}\}$ 是基本列. 由 Cauchy 收敛准则知: $\{a_{n_i}\}$ 收敛.
记 $\lim_{n_i\to\infty} a_{n_i} = \xi$.
而 $|d_i - \xi| < \frac{M-a_1}{2^i}, \lim_{i\to\infty}\frac{M-a_1}{2^i} = 0$.

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} d_i = \xi$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n < \xi$$

所以 ξ 是 $\{a_n\}$ 的上界同理: $\lim_{i\to\infty} c_i = \xi$
所以 $\forall\varepsilon > 0, \exists c_i > \xi - \varepsilon$ 而 $\forall c_i, \exists a_{n_i} \geqslant c_i > \xi - \varepsilon$ 所以 ξ 是 $\{a_n\}$ 的上确界 □

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$$

所以这些定理两两等价

例: 求

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}},\quad a>0$$

解: 不妨设 $a_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}$ (其中有 n 个 a), 易知 $a_n=\sqrt{a+a_{n-1}}$.

首先证明 a_n 递增.

易知 $a_2>a_1$

设 $a_k>a_{k-1}$ 成立, 那么 $a_{k+1}=\sqrt{a+a_k}>\sqrt{a+a_{k-1}}=a_k$.

故 a_n 单调递增.

然后证明 a_n 有上界.

假设 $a_n<2n+1$.

$n=1$ 时, 显然有 $a<2a+1$.

假设 $n=k$ 时满足 $a_k<2a+1$, 那么

$$a_{k+1}=\sqrt{a+a_k}<\sqrt{a+2a+1}=\sqrt{3a+1}<\sqrt{4a+1}<\sqrt{4a^2+4a+1}=2a+1$$

故 a_n 有上界.

由单调有界原理可知: a_n 有上确界. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$, 有:

$$A=\sqrt{a+A}\Rightarrow A=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

即 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

Chapter 2

第二次习题课讲义

2.1 Monday's

2.1.1 习题 1.2

1(4)

用定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

证明.

$$\frac{n!}{n^n}=\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\leqslant\frac{1}{n}$$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor+1$ s.t. $n>N$ 时:

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|\leqslant\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

□

5

证明: 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 又 $|b_n|\leqslant M(n\in N_+)$, 则 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

证明. 由题意知: $\forall n>0,|a_nb_n|\leqslant Ma_n$
由 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 可知: $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)$ s.t. $n>N$ 时, $|a_n|<\varepsilon$
令 $\varepsilon^{'}=M\varepsilon$, 则 $\forall\varepsilon^{'}>0,\exists N^{'}$ s.t. $n>N^{'}$ 时,

$$|a_nb_n-0|\leqslant|Ma_n|<M\varepsilon=\varepsilon^{'}$$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$$

□

6

证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}a_{2k+1}=a,\lim_{k\to\infty}a_{2k}=a$$

则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

证明. $\forall \varepsilon > 0, \exists k_1$ s.t. $k > k_1$ 时, $|a_{2k} - a| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0, \exists k_2$ s.t. $k > k_2$ 时, $|a_{2k+1} - a| < \varepsilon$
取 $k_m = \max\{k_1, k_2\}$
当 $n > 2k_m + 1$ 时:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

即 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ □

7

证明下列数列不收敛
(1) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1, \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1$$
$$\Rightarrow \text{不收敛}$$

(2) $a_n = 5\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (-1)^n$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 6, \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 4$$

8

求下列极限
(1) $a_n = \frac{4n^2+5n+2}{3n^2+2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{4}{3}$$

(2) $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \\ \Rightarrow &\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \end{aligned}$$

(3) $a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n(n+1)/2}\right)$, 其中 $n = 2, 3, \ldots$

$$a_n = \frac{n+2}{3n}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$$

(4)$a_n = \prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$

$$a_n = \frac{n+1}{2n}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

(5) $a_n = \prod_{i=1}^n \left(1 + q^{2^i}\right)$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\prod_{i=1}^n \left(1 + q^{2^i}\right)(1 - q)}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{2^{n+1}}}{1 - q} \\ \lim_{n\to\infty} a_n &= \frac{1}{1 - q} \end{aligned}$$

2.2 Tuesday's

2.2.1 习题 1.2

14

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别收敛于 a,b. 记 $c_n=\max\{a_n,b_n\},d_n=\min\{a_n,b_n\}$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\max\{a,b\},\lim_{n\to\infty} d_n=\min\{a,b\}$$

证明. 不妨设 $a>b$ 取 $\varepsilon=\frac{|a-b|}{2}$
$\exists N1,N2\in\mathbb{N}$ s.t.

$$|a_n-a|<\varepsilon,\forall n>N_1$$

$$|b_n-b|<\varepsilon,\forall n>N_2$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则:

$$b_n<\frac{a+b}{2}<a_n,\forall n>N$$

.........d_n 同理. □

15

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i^2}$

解:

$$\frac{1}{(n+i)^2}<\frac{1}{(n+n)^2},\forall i\in[1,n]$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n+i)^2}<n\cdot\frac{1}{(n+n)^2}=\frac{1}{4n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i^2}=0$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$.

解:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\cdot\sqrt[2^n]{2}}{\sqrt[2^n]{2}}\\&=\lim_{n\to\infty}2^{1-\sqrt[2^n]{2}}\\&=2\end{aligned}$$

(5) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}\cos^2 i}$

$$\cos^2 i<1,\forall i\in[1,n]$$

$$\Rightarrow\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}\cos^2 i}<\sqrt[n]{n}$$

只需要证明 $\exists n$ s.t. $\sum_{i=1}^{n}\cos^2 i>1$ 即可 (自己取几个数便可).

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}\cos^2 i}=1$$

16

设 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 为 m 个正数，求证：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}a_i^n}=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$$

证明. 记 $\max a_1, a_2, \ldots, a_n = a$

$$a^n<\sum_{i=1}^{m}a_i^n<m\cdot a$$
$$\Rightarrow a<\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{m}a_i^n}<\sqrt[n]{m}a$$

又 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}a=a$
故得证. □

17

证明下列数列收敛

(1) $a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

证明. $a_{n+1}<a_n, a_n>0$ 单调有界 $\Rightarrow$ 收敛 □

(2) $a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3^i+1}$

证明. $a_i<\frac{1}{3^i}$ 等比数列求和. 单调递增有上界 $\Rightarrow$ 收敛. □

(3) $a_n=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i q^i, |\alpha_i|\leqslant M, |q|<1$

证明. 用 $a_{n+p}-a_n$ 得出是 Cauchy 列. □

18

证明下列数列收敛，求出极限

(1) $a_n=\frac{n}{c^n}, c>1$

证明. 记 $c=a+1$

$$c^n=(a+1)^n>\frac{n(n-1)}{2}a^2$$
$$\Rightarrow 0<\frac{n}{c^n}<\frac{2}{(n-1)a^2}$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ 收敛. □

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

(5) $a_n=\sin\sin\cdots\sin 1, n$ 个 1.

证明. 当 $0<x<1$ 时, $0<\sin x<x$, 而 $a_n=\sin a_{n-1}$.
故可用数学归纳法证明 $\{a_n\}$ 单调递减且始终保持在区间 $(0,1)$ 中.
又 $a_n>0$, 故 a_n 收敛. □

不妨设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$
由 $a=\sin a$, 可得 $a=0$.

2.3 Friday's

2.3.1 习题 1.2

20

证明: $a_n > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$, 则:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

证明. 取 $\varepsilon = l - m, m \in (1, l)$, $\exists N_0$ s.t. $n > N_0$ 时:

$$|\frac{a_n}{a_n + 1} - l| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_n + 1} > m, \forall n > N_0$$

记 $a_{N_0} = a$

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m^{n-N_0-2}} a_{N_0+1} = 0$$

故 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

21

设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是正项数列, 满足 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, n = 1, 2, \ldots$, 求证：若 $\{b_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \frac{a_n}{b_n}$, 可知 $\frac{a_n}{b_n}$ 递减、有下界 $0 \Rightarrow \{\frac{a_n}{b_n}\}$ 收敛.

$$a_n = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

所以 $\{a_n\}$ 收敛. □

22

利用极限 $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

(1) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$

e

(2) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1}$

$\frac{1}{\mathrm{e}}$

(3) $a_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$

$\frac{1}{\mathrm{e}}$

(4) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}$

e^2

2.3.2 第 1 章综合习题

8

证明: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$$

证明. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln a_i = \ln a$, 此式易证. □

或者考虑用均值不等式进行放缩，但需要考虑 $a = 0$ 和 $a \neq 0$ 的情况.

9

证明, 若 $a_n>0,\forall i\in\mathbb{N},\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 存在, 且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- 建议记在小本本上，学到级数之后回来看一眼这题

证明. 利用第 8 题的结论: 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=A,\frac{a_{n+1}}{a_n}=A_n$.
则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1A_1A_2\cdots A_{n-1}}=A=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

□

10

求下列极限:
(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n\sqrt[i]{i}}{n}$

1

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

转换为

$$a_n=\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$$

利用第九题的结论:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

11

已知 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n ia_i}{n^2}=\frac{a}{2}$$

证明. 是一个 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

$$c_n=\sum_{i=1}^n ia_i,\ d_n=n^2$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a}{2}$$

□

2.4 不等式选讲

Lemma 1. *(Young 不等式)*
Suppose $a,b>0$, $0<\lambda,\mu<1$ and $\lambda+\mu=1$, then:

$$a^\lambda b^\mu\leqslant\lambda a+\mu b\tag{2.1}$$

证明. Let $f(x)=-\ln x$, $f(x)$ is a convex, therefore $f(\lambda a+\mu b)\leqslant\lambda f(a)+\mu f(b)$ □

Generalized to the case under 3 elements:

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma\leqslant\alpha a+\beta b+\gamma c\tag{2.2}$$

证明.

$$\begin{aligned} a^\alpha b^\beta c^\gamma &= a^\alpha \left[b^{\beta/(\beta+\gamma)} c^{\gamma/(\beta+\gamma)}\right]^{\beta+\gamma} \\ &\leqslant \alpha a + (\beta+\gamma) b^{\beta/(\beta+\gamma)} c^{\gamma/(\beta+\gamma)} \\ &\leqslant \alpha a + (\beta+\gamma)\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma} b + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} c\right) \\ &= \alpha a + \beta b + \gamma c \end{aligned}$$

□

It is easy to generalize to the case under n elements using mathematical induction:

$$\prod_{i=1}^{n} a_1^{\lambda_1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \tag{2.3}$$

Suppose $p_1, p_2, \ldots > 0$. We can use $\frac{p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$ to replace λ_i. We have:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \tag{2.4}$$

Especially, if we let $p_1 = p_2 = \cdots = 1$, then it becomes Mean Inequality:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$$

Lemma 2. *(Hölder 不等式) Suppose $a_i > 0, b_i > 0, i = 1, 2, \ldots, \quad p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, then:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.5}$$

证明. if $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$, then we know from Lemma **1** that $a_i b_i \leqslant \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{q} b_i^q$, therefore we have $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant 1$ For general scenario, let

$$a_i^{'} = \frac{a_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}}, \quad b_i^{'} = \frac{b_i}{(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}}$$

Then we have $\sum_{i=1}^n a_i^{'} b_i^{'} \leqslant 1$ □

Especially, if we let $p = q = 2$, then it becomes Cauchy-Buniakowsky-Schwarz Inequality:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \tag{2.6}$$

Chapter 3

第五次习题课讲义

3.1 知识点回顾

3.1.1 Fermat and Rolle theorem

定义 3.1.1. *局部极大值*

$\exists \delta \, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \, f(x_0) > f(x)$

定理 3.1.1. *Fermat 定理*

设 $f(x)$ 在定义域 I 的一个内点 x_0 取到局部极值. 若函数在这一点可导，则 $f^{'}(x_0) = 0$.

定理 3.1.2. *Rolle 定理*

设 $f(x) \in C[a,b]$ 在 (a,b) 内可导，$f(a) = f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a,b)$ $s.t.$ $f^{'}(\xi) = 0$.

3.1.2 微分中值定理

定理 3.1.3. *微分中值定理*

设 $f(x) \in C[a,b]$ 在 (a,b) 可微, $\exists \xi \in (a,b)$ $s.t.$

$$f^{'}(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

定理 3.1.4. *Cauchy 中值定理* $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上可微. $\forall x \in (a,b), g^{'}(x) \neq 0$. 则 $\exists \xi \in (a,b)$ $s.t.$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)}$$

注意: 中值定理都是非充分必要条件，即

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) \ldots$$

$$f^{'}(x_0) = 0 \nRightarrow a < 0 < b, f(a) = f(b)$$

e.g. $f(x) = x^3$

定理 3.1.5. *Darboux 定理*

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则对于介于 $f^{'}(a), f^{'}(b)$ 之间的任何值 λ, $f^{'}([a,b])$ 一定能取到

3.2 确界与极限点

定义 3.2.1. 扩充的实数系

称

$$\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

为**扩充的实数系**.

在扩充的实数系上可以有保留地定义算术：如 $x + (+\infty) = +\infty, x \in \mathbb{R}$.

定义 3.2.2. 确界

一个非空 E 有上 (下) 界，指的是 $\exists a \in \mathbb{R}_\infty \forall x \in E, x \leqslant a (x \geqslant a)$, a 称为集合 E 的一个上 (下) 界.

最小 (大) 的上 (下) 界称为集合的**上 (下) 确界**，记为 $\sup E (\inf E)$

定理 3.2.1. 一个单调递增数列以它的上确界为极限，一个单调递减数列以它的下确界为极限.

例 3.2.1. 设 $a_1 > b_1 > 0$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, n = 1, 2, \ldots$$

证明：他们有相同的极限.

证明. $\forall n > 0, a_n, b_n > 0, a_n \geqslant b_n$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leqslant 0, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} \geqslant 1$$

所以 $\{a_n\}$ 单调减，$\{b_n\}$ 单调增.

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = a$. $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{a+b}{2} \Longrightarrow a = b$

此外

$$a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{a_1 - b_1}{2^n}$$

意味着数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ **依指数收敛**. □

定义 3.2.3. 极限点

设 $\{x_n\}$ 为实数列，x 为实数. 称 x 为该数列的**极限点**，指：$\forall \varepsilon > 0$ 存在 $\{x_n\}$ 的无限多项满足

$$|x - x_n| < \varepsilon$$

如果 $\{x_n\}$ 无上（下）界，称 $+\infty(-\infty)$ 是它的极限点.

定理 3.2.2. 设 $\{x_n\}$ 是一个实数列，$x \in \mathbb{R}_\infty$. 那么

x 为 $\{x_n\}$ 的极限点 $\Longleftrightarrow$ 存在一个子列 $\{x_{n_k}\}$ *s.t.* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

证明. $\Rightarrow$ 请同学们自证. □

定理 3.2.3. 列紧性

一个有界数列一定有有限极限点，即一定有收敛子列.

证明. $\Rightarrow$ 用二分法证明 □

定理 3.2.4. $\{x_n\}$ 有极限 $x = \lim_{n\to\infty} x_n \Longleftrightarrow$ 它只有一个极限点.

证明. 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, 它的任意子列趋于 x. x 是它的唯一极限点. □

3.3 上极限与下极限

定义 3.3.1. 设 E 是数列 $\{x_n\}$ 的极限点的集合. 那么 E 是扩充的实数系 R_∞ 的子集. 通过在 R_∞ 引进自然的序关系, 可以定义 E 的上确界与下确界, 仍然分别记作 $\sup E, \inf E$. 称 $\sup E$ 是数列 $\{x_n\}$ 的**上极限**, 记为

$$\sup E = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \quad or \quad \overline{\lim} x_n$$

下极限记为

$$\inf E = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \quad or \quad \underline{\lim} x_n$$

定理 3.3.1. 设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是两个实数列.

• $\lim x_n = x \Longleftrightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = x$.

证明. 请同学们自证. □

定理 3.3.2. 预留: 请同学们学到级数之后饭回来思考... 见课本 ‡7.1: 凡是用 *d'Alembert* 判别法能判别收敛性的, 都能用 *Cauchy* 判别法判别.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

证明. 学到了级数再讲. □

3.4 开集与闭集

定义 3.4.1. 内点

设 A 为实直线上的一个点集. 称 x_0 为 A 的一个内点, 若 $\exists(a,b)\in A$ $s.t.$ $x_0\in(a,b)$.

定义 3.4.2. 开集

设 A 为实直线上的一个点集. A 是一个**开集**, 若 $\forall x\in A$, x 是 A 的内点.

定理 3.4.1. $\Rightarrow$ 任意个开集的并是开集，无限个开集的并集是开集

$\Rightarrow$ 两个开集的交集是开集，有限个开集的交集是开集

- 无限多个开集的交不是开集，如

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$$

定理 3.4.2. 开集的结构定理

$\mathbb{R}$ 的每个开集都可以表示成之多可数个两两不交的开区间的并，且构成该开集的开区间，在不考虑次序的意义下唯一.

定义 3.4.3. 聚点

设 A 为实直线上的一个点集. 称 x_0 是 A 的一个聚点, 若 $\forall\delta>0,\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}\cap A$ 有无穷个点.

定义 3.4.4. 闭集

设 A 为实直线上的一个点集. 称 A 是一个闭集, 若 $\forall x\in\mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $x\in A$.

例 3.4.1. 证明：一个数列 $\{a_n\}$ 的实数极限点集合 A 为闭集

证明. 设 x_0 是集合 A 的聚点，只需要证明 x_0 是原数列的极限点即可.

由聚点的定义 $\forall\delta>0$, 存在无限多项 $x_k\in A$, 满足 $0<|x_k-x_0|<\frac{\delta}{2}$. 又由于是原数列的极限点. 所以有无数多项 a_l 满足 $0<|a_l-x_k|<\frac{\delta}{2}$, 所以得到

$$0<|a_l-x_0|<\delta$$

$\Longrightarrow x_0$ 也是原数列的极限点，即 $x_0\in A$. □

定理 3.4.3. 设 $A\subset\mathbb{R},x\in\mathbb{R}$, 则下列条件等价:

$$\begin{array}{l|l}\to & x \text{ 是 } B \text{ 的聚点}\\ \to & x \text{ 的任意开邻域都包含 } B \text{ 的不同于 } x \text{ 的点.}\\ \to & \text{集合 } B \text{ 中有一个数列 } \{x_n\}, x_n\neq x, \lim_{n\to\infty}x_n=x\end{array}$$

定理 3.4.4. 一个集合 A 不是闭集当且仅当它的余集 A^c 是开集.

证明. $x\in\mathbb{R}$ 不是 A 的聚点 $\Longleftrightarrow\exists\delta>0,A_x=(x-\delta,x+\delta)$ s.t.

$$(A_x\backslash\{x\})\cap A=\varnothing$$

如果 A 是闭集, $\forall x\in A^c,\exists A_x,A_x\cap A=\varnothing\Longrightarrow A^c$ 是开集.

如果 A^c 是开集, $\forall x\in A^c,\exists A_x\supset A^c,A_x\cap A=\varnothing\Longrightarrow x$ 不是 A 的聚点. 说明 A 的所有聚点属于 $A\Longrightarrow A$ 是闭集. □

定理 3.4.5. 有限个闭集的并集是闭集，任意个闭集的交集是闭集

即 *De Morgan* 律:

$$\bigcap_{i\in I}A_i^c=\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^c,\quad\bigcup_{i\in I}A_i^c=\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)^c$$

定义 3.4.5. 设 f 为 D 上的函数. 取 x_0 为 D 的聚点. $\forall \delta > 0$

$$M(\delta) = \sup\{f(x)|x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

$$m(\delta) = \inf\{f(x)|x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

$\lim_{\delta\to 0} M(\delta)$ 和 $\lim_{\delta\to 0} x(\delta)$ 分别称为 f 在 x_0 处的上极限和下极限, 分别记为

$$\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x), \quad \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$$

Lemma 3. 上极限与下极限一定都存在

例 3.4.2. 证明: $f(x) \in C(a,b)$, f 一致连续 $\iff f(a+0), f(b-0)$ 均存在有限.

证明. 不使用 Cauchy 收敛准则. 用反证法分情况讨论: 极限无穷, 上下极限不相等均不行即可. 下面只证明上下极限不相等且有限的情况.

设上下极限分别为 m_1, m_2. 取 $\varepsilon = \frac{m_1 - m_2}{3}$

$\exists \delta_1$, $M(\delta_1) \in (m_1 - \varepsilon, m_1 + \varepsilon), \forall \delta < \delta_1, M(\delta) \in (m_1 - \varepsilon, m_1 + \varepsilon)$.

$\exists \delta_2$, $m(\delta_2) \in (m_2 - \varepsilon, m_2 + \varepsilon), \forall \delta < \delta_1, M(\delta) \in (m_1 - \varepsilon, m_1 + \varepsilon)$.

$\forall \delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}, \exists x, y \in (a, a+\delta)$, 满足

$$f(x) \in (m_1 - \varepsilon, m_1 + \varepsilon), f(y) \in (m_2 - \varepsilon, m_2 + \varepsilon)$$

$$f(x) - f(y) > \frac{m_1 - m_2}{3} = \varepsilon$$

与 f 一致连续矛盾. □

3.5 Answer of homework

3.5.1 10.16

⇒ P98 2(偶), 3(1), (2), 4

⇒ **2.** 求下列函数的微分

(2) $\sin x - x\cos x$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\sin x - x\cos x) =& \ \mathrm{d}(\sin x) - \ \mathrm{d}(x\cos x) \\ &= (\cos x - \cos x + x\sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\sin x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

(4) $y = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y =& \ \mathrm{d}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \\ =& \ \mathrm{d}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} \\ =& \ \mathrm{d}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) \\ =& \ \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \\ =& \ \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

(6) $y = \tan^2(1+2x^2)$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= 2\tan(1+2x^2)\,\mathrm{d}\tan(1+2x^2) \\ &= 2\tan(1+2x^2)\frac{1}{\cos^2(1+2x^2)}4x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{8x\tan(1+2x^2)}{\cos^2(1+2x^2)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

(8) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

⇒ **3.** 对下列函数，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

(1)

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 - \frac{1}{t^2+1} &= \frac{t^2}{t^2+1} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{t}{2} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{t^2+1}{2t} = \dfrac{t^2+1}{4t} \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=1-\cos t\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=\sin t\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}=\cot\dfrac{t}{2}\\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{-1}{\sin^2\frac{t}{2}}\dfrac{1}{1-\cos t}=-\dfrac{1}{4\sin^4\frac{t}{2}}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 4. 求下列曲线在已知点处的切线方程

(1)

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$$

在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sin t,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos t\end{cases}\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-\cos t}{\sin t}=-\cot t$$

在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处，切线方程为：$l:y=-x+\sqrt{2}$.

(2)

$$\begin{cases}x=\dfrac{3t}{1+t^2},\\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^2}\end{cases},\quad 在t=2处$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{3-3t^2}{(1+t^2)^2},\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{6t}{(1+t^2)^2}\end{cases}\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2t}{1-t^2}$$

在 $t=2$ 处，切线方程为：$l:y=-\frac{4}{3}x+4$

3.5.2 10.18

P106 4(2), (3), 5(1), 6 ~ 9,12,15,18(3), (4)

$\Rightarrow$ **4** 证明下列不等式。

(2) 当 x > 0 时，有 $\frac{x}{1+x}>\ln(1+x)<x$.

证明.

$$\begin{aligned}f(x)&=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\\ f^{'}(x)&=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0\\ \Longrightarrow f(x)&>f(0)=0\\ g(x)&=x-\ln(1+x)\\ g^{'}(x)&=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0\\ \Longrightarrow g(x)&>g(0)=0\end{aligned}$$

□

(3) 当 $0<a<b$ 时，有 $(a+b)\ln(\frac{a+b}{2})>a\ln a+b\ln b$.

证明.

$$\begin{aligned}f(x) &= x\ln x\\ f^{'}(x) &= 1+\ln x\\ f^{''}(x) &= \frac{1}{x} > 0\end{aligned}$$

$\Longrightarrow f(x)$ 是凸函数, 故:

$$\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b) > f(\frac{a+b}{2})$$

□

$\Rightarrow$ **5** 证明下列恒等式

(2) $\arctan x = \arcsin(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$

证明.

$$\begin{aligned}y = \arctan x \Longrightarrow x = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} &= \frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\\ \Longrightarrow \sin y &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\ \Longrightarrow y &= \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\end{aligned}$$

□

$\Rightarrow$ **6** 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的可微函数，对任意 $x\in[0,1]$ 有 $f(x)\in(0,1)$ ；并且对每个 x ，有 $f^{'}(x)\neq 1$ 。证明：在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x ，使 $f(x)=x$.

证明. 存在性:
令 $g(x)=f(x)-x$
$\Rightarrow g(0)>0, g(1)<0$ 而 $f(x)$ 可微，故 $g(x)$ 可微
故必存在至少一点 x_0 使 $g(x_0)=0$
又由于对任意一点 $x\in(0,1)$, 有 $g^{'}(x)=f^{'}(x)-1\neq 0$

唯一性用反证法秒了 □

$\Rightarrow$ **7** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可微，且 $|f^{'}(x)|<1$ ，又 $f(0)=f(1)$ 。证明：对于 $[0,1]$ 上的任意两点 x_1,x_2，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$。

证明. 略 □

$\Rightarrow$ **8** 若 $f(x)$ 处处可导，且 $f^{'}(x)=f(x)$，证明：$f(x)=Ce^x, C$ 为任意常数

证明. 令 $h(x)=\frac{f(x)}{e^x}$.

$$h^{'}(x)=\frac{f^{'}(x)-f(x)}{e^x}=0$$

故 $h(x)\equiv C \Longrightarrow f(x)=Ce^x$ □

$\Rightarrow$ **9** 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$ 。证明：在 (a,b) 内存在一点 ξ ，使得 $f^{'}(\xi)>0$。

证明. $\exists x_0, f(x_0)\neq f(a)$ ... □

$\Rightarrow$ **12** 设 $\forall x,y\in\mathbb{R}, |f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^2$ (M 为常数). 证明：$f(x)$ 恒为常数.

证明. 由定义可以得到一阶导数恒存在有限，所以得证. □

$\Rightarrow$ **15** 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导 $f(0)=0, f^{'}(x)$ 严格单调递增. 证明: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调递增.

证明. 令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}, x\in(0,+\infty)$.

$$g^{'}(x)=\frac{xf^{'}(x)-f(x)}{x^2}$$

$$\exists\xi\in(0,x),\quad \frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f^{'}(\xi)}{1}$$

由于 $f^{'}$ 单调递增

$$f^{'}(x)>f^{'}(\xi)=\frac{f(x)}{x}\Longrightarrow g^{'}(x)>0$$

□

$\Rightarrow$ **18** 求下列函数单调区间与极值

略.

3.5.3 10.20

P107 18(5), (6), 17, 20 (1) ~ (5), 21(2), 25, 26

$\Rightarrow$ **18** 求下列函数的单调区间与极值.

(5) $y=\frac{(\ln x)^2}{x}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$$

...

(6) $y=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{1-x}{1+x^2}$$

$\Rightarrow$ **17** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导函数，$f(0)=f^{'}(0), f(1)=f^{'}(1)$. 证明 $\exists\xi\in(0,1)$ s.t. $f(\xi)=f^{''}(\xi)$

证明.

$$g(x)=e^x(f(x)-f^{'}(x)),\quad g(0)=0,\quad g(1)=0$$

$$\exists\xi\quad \text{s.t.}\quad g^{'}(\xi)=e^{\xi}(f(\xi)-f^{''}(\xi))=0$$

□

$\Rightarrow$ **20**. 证明下列不等式

(1) $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1, x\in(0,1], p>1$.

证明. 设 $f(x)=x^p+(1-x)^p$ 在 $(0,1]$ 上求导即可. □

(2) $\tan x>x+\frac{x^3}{3}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

证明. 设 $f(x)=\tan x-x-\frac{x^3}{3}$.

$f(0)=0$

$$f^{'}(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1-x^2=\tan^2 x-x^2>0$$

... □

(3) $\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}, 0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$.

证明. $\Longleftrightarrow \frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1}$ □

(4) $\ln(x+1)>\frac{\arctan x}{1+x}, x>0$

证明. $\iff (1+x)\ln(1+x) > \arctan x$.

令 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$

$f^{'}(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} = \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x^2}$.

$f^{''}(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$

$\Longrightarrow f^{'}(x) > f^{'}(0) = 0$

$\Longrightarrow f(x) > f(0) = 0$ □

(5) $1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geqslant \sqrt{1+x^2}$

证明. $f(x) = 1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$

$f^{'}(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$f^{'}(x) > 0, x > 0; \quad f^{'}(x) < 0, x < 0$

$\Longrightarrow f(x) \geqslant f(0) = 0$ □

⇒ **21** 确定下列函数实零点的个数以及所在范围

(2) $f(x) = ax - \ln x, \quad a > 0$

$$f(0+0) = +\infty$$

$$f^{'}(x) = a - \frac{1}{x} \Longrightarrow f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \ln\frac{1}{a} = 1 + \ln a$$

讨论 a 的大小, 略.

⇒ **25** 设 $b > a > 0, f(x) \in C[a,b]$, 在 (a, b) 内可微. 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $2\xi(f(b)-f(a)) = (b^2-a^2)f^{'}(\xi)$.

$$g(x) = x^2$$

$$\exists \xi \in (a,b) \quad \text{s.t.} \quad \frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

⇒ **26** 设 $f(x) \in C[a,b], ab > 0$, 在 (a,b) 上可微. 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ s.t.

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(\xi) - \xi f^{'}(\xi)$$

证明. 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}, h(x) = \frac{1}{x}$. 由 Cauchy 中值定理:

$$\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{\xi f^{'}(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}$$

$$\text{LHS} = \frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$$

$$\text{RHS} = f(\xi) - \xi f^{'}(\xi)$$

□

Chapter 4

第八次习题课

4.1 简要回顾-不定积分

1. 原函数与不定积分的定义 设函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若对于任意 $x\in(a,b)$ 有

$$F'(x)=f(x) \quad 或 \quad dF(x)=f(x)dx$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的一个原函数.

函数 $f(x)$ 的全体原函数称为 $f(x)$ 的不定积分，记为 $\int f(x)dx$. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)dx=F(x)+C$，C 为任意常数.

2. 不定积分的基本性质

(1) $\int f'(x)dx=f(x)+C$； (2) $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$；

(3) $\int[k_1f(x)\pm k_2g(x)]dx=k_1\int f(x)dx\pm k_2\int g(x)dx$ (k_1,k_2 不同时为零).

3. 基本公式

(1) $\int x^a dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C\ (a\neq-1)$； (2) $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$；

(3) $\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C$； (4) $\int e^x dx=e^x+C$；

(5) $\int\sin x dx=-\cos x+C$； (6) $\int\cos x dx=\sin x+C$；

(7) $\int\sec^2 x dx=\tan x+C$； (8) $\int\csc^2 x dx=-\cot x+C$；

(9) $\int\tan x dx=-\ln|\cos x|+C$； (10) $\int\cot x dx=\ln|\sin x|+C$；

(11) $\int\sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$； (12) $\int\csc x dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$；

(13) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$； (14) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；

(15) $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$； (16) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$；

(17) $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$；

(18) $\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$；

(19) $\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$；

(20) $\int\operatorname{sh}x dx=\operatorname{ch}x+C$； (21) $\int\operatorname{ch}x dx=\operatorname{sh}x+C$.

4.2 积分求导

定理 4.2.1. *Leibniz* 律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{g(t)}^{h(t)} F(x,t)\,\mathrm{d}x = F(h(t),t)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - F(g(t),t)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial F}{\partial t}\,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

常见的形式一般是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{g(t)}^{h(t)} F(x)\,\mathrm{d}x = F(h(t))\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - F(g(t))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$$

4.3 作业答案

4.3.1 习题 4.1

1. 求下列不定积分

(2)

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int (e^{2x}-e^x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$$

(4)

$$\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}\frac{1}{\cos x} = \tan x - x + C$$

(6)

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\tan x + x) + C$$

2. 用第一代换法求下列不定积分

(1)

$$\int (2x-1)^{100}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{100}\,\mathrm{d}(2x-1) = \frac{1}{202}(2x-1)^{101} + C$$

(3)

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}(1+\sin x+\cos x)\\ &= \ln|1+\sin x+\cos x| + C\end{aligned}$$

(5)

$$\int x\sqrt{1-x^2} = -\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(7)

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int (\frac{\pi}{2} - \arctan x)\,\mathrm{d}\arctan x\\ &= \frac{\pi}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\arctan^2 x + C\end{aligned}$$

也有其他形式如:

$$-\frac{1}{2}\arctan^2\frac{1}{x} + C$$

(9)

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

3. 用第二代换法求下列积分
这里只给出答案

(1)

$$\int \sqrt{e^x-2}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{e^x-2} - 2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x-2}{2}} + C$$

(3)

$$\int \frac{1}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{|x|}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$$

(5)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{x+1}) + C$$

(7)

$$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{x-\ln x} + C$$

(9)

$$\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{20}(2x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{8}(2x+1)^{\frac{2}{3}} + C$$

(11)

$$\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \arcsin\frac{1}{x} + C$$

4. 求下列不定积分

(2)

$$\int \max\{1,x^2\}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x+C, & -1\leqslant x\leqslant 1 \\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}\mathrm{sgn}x, & |x|>1 \end{cases}$$

5. 用分部积分法求下列不定积分

(1)

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x + C$$

(3)

$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)] + C$$

(5)

$$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln|\sec x+\tan x|) + C$$

(7)

$$\int x\arcsin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\arcsin x - \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$$

(9)

$$\int \arcsin^2 x\,\mathrm{d}x = x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$$

6. 导出下列不定积分的递推公式 略.

7. 求下列不定积分

(1)

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = x - \ln(e^x+1) + C$$

(2)

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + C$$

(3)

$$\int \frac{1}{x^4+x^6}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x} + \arctan x + C$$

(4)

$$\int x\sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(5)

$$\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan x\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1} - \ln x - \arctan^2\sqrt{x-1} + C$$

(6)

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}\,\mathrm{d}x = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4\sqrt{e^x-2} + 4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x-2}{2}} + C$$

4.3.2 习题 4.2

1. 求下列有理函数的不定积分

(5)

$$\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

(6)

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x-1) + C$$

(7)

$$\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}x+1}{x^4+\sqrt{2}x+1}\right| + C$$

(8)

$$\int \frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\ln(x^8+1) + \frac{1}{8(x^8+1)} + C$$

2. 求下列三角函数有理式的不定积分

(5)

$$\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\sin^2 x + C$$

(6)

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = x - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2}\tan x + C$$

(7)

$$\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$$

(8)

$$\int\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\tan^3 x+3\tan x-\frac{3}{\tan x}-\frac{1}{3\tan^3 x}+C$$

(9)

$$\int\frac{1}{2\sin x+\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+\frac{1}{4(\cos x+1)}+C$$

4.4 补充习题

(1)

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\left(\tan^2 x+1\right)^2}{\tan^4 x+1}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\left(t^2+1\right)^2}{t^4+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}}+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\tan x-\cot x}{\sqrt{2}}+C\end{aligned}$$

(2)

$$\int\sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$$

由于

$$\begin{aligned}\int(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x})\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}\,\mathrm{d}x\\&=\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}\\&=\sqrt{2}\arcsin(\sin x-\cos x)+C_1\\\int(\sqrt{\tan x}-\sqrt{\cot x})\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}\,\mathrm{d}x\\&=-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}}\\&=\sqrt{2}\ln\left|\sin x+\cos x+\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}\right|+C_2\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\left(\int(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x})\,\mathrm{d}x+\int(\sqrt{\tan x}-\sqrt{\cot x})\,\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arcsin(\sin x-\cos x)+\ln\left|\sin x+\cos x+\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}\right|\right)+C\end{aligned}$$

4.5 简要回顾-定积分

1. 定积分的定义 设 $f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的有界函数,任取分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,将$[a,b]$分为 n 个子区间$[x_{i-1},x_i]$,记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$,又在每个子区间上任取一点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$,若不论对区间$[a,b]$如何分法,也不论 ξ_i 在$[x_{i-1},x_i]$中如何取法,只要当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$ 趋于零时,和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限存在,则称此极限值为 $f(x)$在$[a,b]$上的定积分,记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

此时也称 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

特别地,把区间$[a,b]$分为 n 等份,ξ_i 取为每个小区间的右端点,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.\quad (\text{此时 } a=0,b=1)$$

使用以上两个公式可计算某些和式的极限.

定理 4.5.1. *Schwarz Inequality:*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

证明. 法一:

构造函数

$$F(x)=\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}x\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}x-\left(\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

$$F(a)=0,F^{'}(x)\geqslant 0$$

□

证明. 法二:

利用 Δ

$\forall t\in\mathbb{R}$, we know $(f(x)+tg(x))^2\geqslant 0\Longrightarrow\int_a^b(f(x)+tg(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant 0$. Therefore we have:

$$\int_a^b(f(x)+tg(x))^2\,\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x+2t\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x+t^2\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$$

$$\Delta=\ldots$$

□